C5 - ÉQUATIONS PRODUITS

1 Équation « produit nul »

Définition

Une **équation produit nul** est une équation dont l'un des membres est un produit et l'autre membre est nul.

Propriété

Un produit est nul signifie que l'un de ses facteurs est nul.

Exemple

$(x + 3)\times(2x - 1) = 0$
signifie que
$x + 3 = 0$ ou $2x - 1 = 0$
$x = -3$ $2x = 1$
$x = 0,5$
Les solutions de cette équation sont $x = -3$ et $x = 0,5$

2 Se ramener à une équation produit

Pour résoudre une équation, il n'est pas toujours judicieux de développer chacun de ses membres.

Exemple

Résoudre l'équation : $(3x - 1)(2x + 5) = 4(3x - 1)$
En développant chaque membre, on obtient $6x^2 + 13x - 5 = 12x - 4$ ... qu'on ne peut pas résoudre au collège.
Pour résoudre cette équation, on va:
- annuler l'un des membres:
  $(3x - 1)(2x + 5) -4(3x - 1) = 4(3x - 1) - 4(3x - 1)$ d'où l'équation $(3x - 1)(2x + 5) -4(3x - 1) = 0$
- factoriser le membre restant:
  Le facteur commun étant ici $(3x - 1)$,
  $(3x - 1)(2x + 5) -4(3x - 1) = (3x - 1)[(2x + 5) - 4] = (3x - 1)(2x + 1)$
- résoudre l'équation produit nul obtenue

$(3x - 1)(2x + 1) = 0$
signifie que
$3x - 1 = 0$ ou $2x + 1 =0$
$3x = 1$ $2x = -1$
$x = 1/3$ $x=-0,5$
Les solutions de cette équation sont $x = 1/3$ et $x=-0,5$

Pour obtenir une équation produit nul, on peut factoriser en utilisant l'identité $a^2 - b^2 = (a + b)\times(a - b)$

Exemple

$(x + 5)^2 - 49 = 0$
$(x + 5)^2 - 7^2 = 0$
$[(x + 5) + 7] \times [(x + 5) - 7] = 0$
$(x + 12) \times (x - 2) = 0$
qui admet deux solutions $x = -12$ et $x = 2$

$(x - 3)^2 - (2x - 5)^2 = 0$
$[(x - 3) + (2x - 5)]\times[(x - 3) - (2x - 5)] = 0$
$(3x - 8)(-x + 2) = 0$
qui admet deux solutions : $x = 8/3$ et $x = 2$

Propriété

L'équation $x^2 = a$ (avec a nombre strictement positif fixé) admet deux solutions : $x = \sqrt{a}$ et $x = -\sqrt{a}$

Exemple

$x^2 = 78$
$x^2-78 = 0$
$x^2-(\sqrt{78})^2 = 0$
$(x + \sqrt{78})(x-\sqrt{78}) = 0$ Cette équation a donc deux solutions: $x=\sqrt{78}$ et $x = -\sqrt{78}$